

VIII. Propositiones aliquot de Projectilium motu
Parabolico, Scriptæ An. 1710. Per B. Taylor,
LL. D. R. S. S.

PROPOSITIO I.

*Vi gravitatis, ejusq; directione datis, motus corporis
projecti, in medio non resistente, fit in Parabolâ.*

DEMONSTRATIO.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. I.) in directione lineæ AB , sitque ejus trajectoria curva ACD . Ad trajectoriæ punctum quodlibet C , duc rectam CB in directione vis Gravitatis, rectæ AB occurrentem in B ; atq; resolvetur motus projectilis per AC in partes AB , BC , quarum AB oritur a motu projectionis uniformi, atq; BC a vi gravitatis accelerante. Est ergo recta descripta AB tempori proportionalis ab initio motûs in A , atq; est BC in duplicatâ ratione ejusdem temporis, sicut olim demonstravit Galilæus; adeoque in duplicatâ ratione rectæ AB . Cum ergo sit BC in duplicatâ ratione rectæ AB , constat curvam ACD esse Parabolam.
Q. E. D.

PROP.

P R O P. II.

Velocitas corporis projecti in quolibet puncto trajectoriae, ea est, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem aequalem quartae parti parametri Parabolae ad punctum illud.

D E M O N S T R A T I O.

Sit Trajectoria ACD (Fig. 2.) Ad punctum quodlibet A ducantur tangens AB , & diameter AE . In tangente AB fiat AB aequalis dimidio parametri ad verticem A , & diametro AE parallela ducatur BC , trajectoriae occurrens in C , & ad punctum C duci intelligatur tangens CG , tangenti AB occurrens in F , atq; diametro AE in G . Tum ex naturâ parabolae erunt AG , CB aequales, adeoq; & AF , FB ; & quoniam est AB aequalis dimidio parametri ad punctum A , erit BC quarta pars ejusdem parametri, & proinde aequalis ipsi BF . Ipsi BC proximam & parallelam duc bc , parabolae occurrentem in c , & duc lineam Bb parallelam $C\beta$, ipsi bc occurrentem in β . Tum quoniam spatium Cc , adeoque & spatium βc , finguntur perexigua, velocitates quibus describuntur erunt aequabiles quamproximè; adeoq; spatia Bb , seu $C\beta$, Cc , cum eodem tempore describantur, erunt ut velocitates quibus describuntur, & vicissim velocitates erunt ut spatia. Coincidant puncta C , c , atq; erunt hae rationes accuratae. Sed in isto casu propter similia triangula $C\beta c$, $FB C$, fit $C\beta$ ad βc , sicut FB ad BC ; ideoq; velocitates quibus describuntur Bb , βc sunt ut FB , BC , hoc est, sunt aequales. Velocitas autem, quâ describitur βc ,

ea est, qua movetur projectile in puncto A , & velocitas altera qua describitur βc , ea est quam corpus acquirit cadendo per altitudinem BC quartæ partis parametri ad punctum A . Est ergo velocitas projectilis in quolibet puncto A æqualis velocitati, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem quartæ partis parametri ad punctum illud. *Q. E. D.*

P R O P. III.

Datis velocitate & directione projectionis, invenire Trajectoriam corporis projecti.

1. Projiciatur corpus de loco A (Fig. 3.) in directione rectæ AB . Duc AC in directione vis gravitatis, (hoc est Horizonti perpendicularem,) ejus longitudinis, ut sit C punctum, unde corpus cadendo acquirere potest velocitatem in A , quâ fit projectio. Duc AF æqualem AC , angulum FAB constituentem cum lineâ directionis AB , æqualem angulo CAB . Duc CD perpendicularem ad AC (hoc est horizonti parallelam,) eiq; occurrentem FD , ipsi AC parallelam. Bifeca FD in E ; atq; erit EF axis, atq; E vertex principalis Parabolæ, per quam movetur projectile. Unde describetur Trajectoria per notas proprietates Parabolæ. *Q. E. F.*

DEMONSTRATIO.

Est enim AC quarta pars parametri ad verticem A . Unde constant cætera ex conicis.

2. Ad punctum Trajectoriæ quodvis G , duc GH ipsi AC parallelam, & ipsi CD occurrentem in H ; atque iter HG altitudo, per quam corpus cadendo acquirere potest

Z

potest velocitatem, quâ movetur projectile in puncto *G*. *Q. E. F.*

Hoc item constat ex Prop 2. & ex conicis.

Scholium. Si ad puncta *A*, & *C* (Fig. 2.) ducantur tangentes *AB*, *CG* occurrentes rectis horizonti perpendicularibus *CB*, *AG*, in *B* & *G*; velocitates in *A* & *C* erunt inter se ut tangentium partes interceptæ, *AB*, *CG*.

P R O P. IV.

Unico factò experimento invenire velocitatem projectionis.

Projiciatur corpus de loco *A* (Fig. 2.) in directione qualibet *AB*, atq; observetur punctum percussum *C*. In directione vis gravitatis ducatur *CB*, ipsi *AB* occurrens in *B*, atque ipsis *CB*, *AB*, fiat tertia proportionalis *L*. Erit quarta pars longitudinis *L* altitudo, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem projectilis in *A*. *Q. E. I.*

D E M O N S T R A T I O.

Est enim *L* parameter Trajectoriæ ad punctum *A*; unde constat solutio per propositionem secundam.

Scholium. Commodissimè instituitur experimentum, erectâ ad horizontem perpendiculari *AG*, & directionem fumendo *AB*, quæ bifecet angulum *CAG*, rectâ etiam *AC* existente horizonti parallelâ. Nam in isto casu altitudo quæsitâ æqualis est dimidio distantia *AC*.

PROP.

PROP. V.

Datis directione & velocitate projectionis; invenire occursum Trajectoriae cum rectâ transeunte per punctum unde fit projectio.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. 4.) in directione rectæ AB . In directione gravitati contrariâ, fiat AC æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem, quâ fit projectio, atq; ducatur CE ipsi AC perpendicularis. Fiat FA æqualis ipsi CA , atq; angulum constituens FAB æqualem angulo CAB . Sit AK recta, cujus occursum cum Trajectoriâ quæritur. Duc FI ipsi AK perpendicularem, atq; ipsi CE occurrentem in D . In CE fume ED æqualem CD , atq; ducatur ipsi CE perpendicularis EK , ipsi AK occurrens in K . Erit K punctum quæsitum.

DEMONSTRATIO.

In FI productâ fiat fI æqualis FI , atq; ducantur fA , fE , FE , FK . Quoniam est angulus FIA rectus, atq; fI æqualis FI , est etiam fA æqualis FA . Sed per constructionem est FA æqualis CA , atque angulus DCA rectus. Sunt ergo puncta C , F , f ad circumulum centro A descriptum, quem tangit recta DC in C . Sunt ergo FD , CD , fD , continuè proportionales. Sed est ED æqualis CD (per constructionem) Sunt ergo FD , ED , fD continuè proportionales; adeoque ob angulum communem ad D , triangula FED , EfD sunt similia, atque angulus DEF æqualis angulo EfF .

Puncta itaq; tria F , E , f sunt ad circulum, quem tangit recta ED in E . Sed quoniam est fI æqualis FI , atq; angulus FIK rectus, centrum istius circuli est in rectâ IK ; item quoniam est angulus DEK rectus, centrum illud est etiam in rectâ EK . Est ergo K centrum istius circuli, adeoq; FK æqualis est ipsi EK . Jam (*per Prop. 3.*) sunt F focus Trajectoriæ, atq; Ca quarta pars parametri ad punctum A . Unde cum sit CE ad AC & EK perpendicularis, atq; FK æqualis EK , erit punctum K ad Trajectoriam (*per conica*). *Q. E. D.*

P R O P. VI.

Isdem datis, invenire occursum Trajectoriæ cum rectâ, quâlibet positione datâ.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. 5.) in directione AB , sitq; GH recta cujus occursum cum Trajectoriâ quæritur. Duc AC in directione gravitati contrariâ, atq; æqualem altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem, quâ sit projectio; & duc AF æqualem ipsi AC , ita ut sit angulus FAB æqualis angulo CAB ; & ducatur CE perpendicularis ipsi CA . Ducatur FI ipsi GH occurrens ad angulos rectos in I , atq; ipsi CE in D ; & in FI fiat fI æqualis FI . In CE fiat ED media proportionalis inter FD & fD ; & ipsi CE ducatur perpendicularis EK , ipsi GH occurrens in K . Erit K punctum quæsitum. *Q. E. I.*

D E M O N S T R A T I O.

Conjungendo fE demonstratur ad modum propositionis præcedentis.

Scholium.

Scholium. Quoniam punctum E sumi potest ad utramlibet partem puncti D , duo sunt puncta K, k , ubi recta GH occurrit Trajectoriæ.

P R O P. VII.

Datâ velocitate projectionis, invenire directionem, quæ faciat, ut Trajectoria transeat per punctum datum.

Projiciatur corpus de loco A , (Fig. 4.) & sit K punctum, per quod transire debet Trajectoria quæsitâ. Fiat AC , in directione gravitati contrariâ, æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem projectionis. Ducatur CE ipsi AC perpendicularis, & ad eam duc KE perpendicularem. Centris A & K , & radiis CA , EK describantur duo circuli sibi mutuo occurrentes in F . Duc FA , & biseca angulum CAF rectâ AB . Erit AB directio quæsitâ, in quâ fieri debet projectio, ut transeat Trajectoria per punctum K . Q. E. F.

D E M O N S T R A T I O.

Est CA æqualis quartæ parti parametri ad punctum A (per *Prop. 2.*) Et per constructionem sunt FA , CA æquales, item FK , EK . Est ergo F focus Parabolæ per puncta A , K , descriptæ: Sed illam tangit recta AB in A , propter angulos FAB , CAB æquales. Corpore itaq; projecto de puncto A , in directione AB , eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem CA , transibit Trajectoria per punctum K . Q. E. D.

NB. Cum

NB. Cum circulorum centris A, K , & radiis CA, EK , descriptorum duo sint concursus, F, f , bisectis angulis FAC, fAC , duo etiam erunt directiones, quæ faciant, ut Trajectoria transeat per punctum datum K .

P R O P. VIII.

Datâ directione projectionis, invenire velocitatem, quæ faciat ut Trajectoria transeat per punctum datum.

Projiciatur corpus de loco A (Fig. 6.) in directione rectæ AB , & faciendum sit ut transeat Trajectoria per punctum K . Duc AK , eamq; biseca in C , & in directione gravitatis duc CB , ipsi AB occurrentem in B ; & junge BK . Duc AD, KE , ipsi CB parallelas, & ducantur AF, KF sibi mutuo occurrentes in F , ita ut sint anguli FAB, DAB æquales, item FKB, EKB . Erit FA æqualis altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem quæsitam, quâ projectio fieri debet in directione AB , ut transeat Trajectoria per K . *Q. E. F.*

D E M O N S T R A T I O.

Quoniam CB est in directione gravitatis, est diameter Parabolæ; & quoniam CA æqualis est CK , est CB diameter ad ordinatam AK . Unde cum sit AB tangens ad parabolam in A , erit etiam KB tangens ad punctum K . Hinc quoniam AD est in directione diametrorum, atq; angulus FAB æqualis angulo DAB , transit AF per focus parabolæ. Eodem argumento transit etiam KF per focus. Est ergo

ergo F focus parabolæ, adeoq; FA quarta pars parametri ad punctum A , quæ proinde æqualis est altitudini, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem ad hoc necessariam, ut projecto corpore de A , in directione AB , transeat Trajectoria per punctum K .

P R O P. IX.

Invenire velocitatem minimam & directionem ei congruam, quâ fieri potest, ut transeat Trajectoria per punctum datum.

Projiciendum sit corpus de loco A (Fig. 7.) cum velocitate omnium minimâ & directione ei congruâ, quâ fieri potest ut perveniat in locum K , hoc est ut transeat Trajectoria per punctum K . Ductis AC , KE in directione gravitati contrariâ, & ductâ AK , biseca angulos CAK , EKA , rectis AB , KB , sibi mutuo occurrentibus in B . Duc BC ipsi AC occurrentem ad angulos rectos in C , atq; erit CA altitudo, per quam corpus cadendo acquirere potest velocitatem quæsitam; eritq; AB directio quæsitâ. $\mathcal{Q}.E.F.$

D E M O N S T R A T I O.

Ducatur BF ipsi AK occurrens ad angulos rectos in F , atque occurrat CB ipsi KE in E . Propter angulos CAB , BAF , item angulos EKB , BKF , æquales atq; angulos rectos in C , E , & F , erunt æquales CA , FA , item EK , FK . Hinc constat puncta A , K esse ad parabolam, quam tangit recta AB in A , cujusq; parameter ad punctum A est quadruplum altitudinis CA , foco existente F . Corpore itaque projecto

projecto de A in directione AB , eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem CA , Trajectoria erit dicta Parabola (per Prop. 7.) Dico autem illam esse velocitatem minimam, seu esse CA partem quartam parametri omnium minimæ, quâ Parabola describi potest, quæ transeat per puncta A, K .

Si fieri potest, in CA capiatur altitudo cA minor, quæ sit quarta pars parametri ad punctum A . Duc ipsi CA perpendicularem ce , ipsi KE concurrentem in e , & centro A & radio Ac describatur circulus ipsi AK occurrens in f . Quoniam cA dicitur quarta pars parametri ad punctum A , focus Parabolæ erit punctum aliquod p , in circumferentia circuli cpf , centro A & radio Ac descripti. Si ergo sit punctum K ad parabolam illam, erit pK æqualis eK . Est vero FK æqualis EK . Unde cum sit eK minor ipsâ EK , erit etiam pK minor ipsâ FK . Sed est pK major ipsâ fK , atq; est fK major ipsâ FK , (quoniam est fA minor ipsâ FA per hyp.) unde sit pK major ipsâ FK . Sed jam dicebatur pK minor ipsâ FK ; quæ repugnant. Nequit ergo Parabola describi, quæ transeat per puncta A, K , minori parametrio quam in solutione definitum est. $\mathcal{Q}. E. D.$

P R O P. X.

Datâ velocitate projectionis, invenire directionem, quæ faciat, ut corpus projiciatur ad distantiam omnium maximam in plano dato; atq; distantiam illam definire.

Sit planum datum AK (Fig. 8.) atq; invenienda sit distantia maxima AK , ad quam corpus projici potest in plano illo. Duc

Duc AC in directione gravitati contrariâ, æqualem quartæ parti parametri ad punctum A . Tum bisectio angulo CAK rectâ AB , erit AB directio projectionis quæsitæ. Duc CB ipsi CA perpendiculararem, rectæ AB occurrentem in B , atque in CB productâ fiat BE æqualis ipsi BC . Tum ductâ EK , ipsi CA parallelâ, quæ occurrat plano AK in K , erit AK distantia maxima quæsitæ.

DEMONSTRATIO.

Centro A & radio AC describe circulum, ipsi AK occurrentem in F , & ducantur BF , BK . Quoniam anguli CAB , BAF sunt æquales (per constructionem) atque AF æqualis CA , erit BF æqualis CB , æqualis BE (per constructionem) atq; anguli ad F recti. Unde etiam fit FK æqualis EK . Sunt ergo puncta A , K ad parabolam foco F descriptam, quam tangit AB in A (propter angulos CAB , FAB æquales) quartâ parte parametri ad punctum A existente CA . Corpore igitur projecto de loco A , in directione AB , eâ cum velocitate, quam corpus acquirere potest cadendo per altitudinem CA , Trajectoria transibit per punctum K (per Prop. 2.) *Q. E. D.*

Dico autem, quod fit KA distantia omnium maxima, ad quam corpus projici potest de loco A eâdem cum velocitate.

Si fieri potest, eâdem parametro, ad A describatur parabolâ, quæ transeat per punctum distantius k ; hoc est projiciatur corpus ad distantiam majorem kA . Duc Bk , atq; ipsi KE parallelam ke , ipsi CE occurrentem in e . Quoniam FB , EB , item FK , EK sunt æquales, sunt etiam anguli FBK , EBK æquales. Angulus ergo FBk major est angulo kBe ; unde

Aa

fit

fit kF major ipsâ ke . Sed quoniam est AC quarta pars parametri ad punctum A , focus parabolæ erit alicubi in circumferentiâ circuli centro A , & radio CA descripti. Sit focus ille p , & ducatur pk . Tum quoniam pk major est ipsâ Fk , erit etiam pk major ipsâ ke . Sed ut parabola transeat per punctum k , debet esse pk æqualis ke . Nequit ergo parabola duci in circumstantiis propositis, quæ transeat per punctum k distantius puncto K ; adeoq; nec corpus projici ad distantiam majorem ipsâ KA . *Q. E. D.*

P R O P. XI.

Iisdem positis, invenire locum puncti K, seu Curvam describere, quæ tangat omnes parabolas eodem vertice A & eâdem parametro descriptas.

Sit A (Fig. 9.) vertex datus, atq; in directione gravitati contrariâ ducatur AC æqualis quartæ parti parametri datæ. Tum descriptâ parabolâ, cujus vertex principalis sit C , atq; focus A ; erit ea curva quæsitâ.

D E M O N S T R A T I O.

Duc quamlibet AK , atq; in eâ fume FA æqualem CA , & ducatur CB ad CA perpendicularis, sitq; K punctum in propositione præcedente inventum. In AC produciâ, factâ Cc æquali CA , ducatur ce parallela ipsi CE ; ducatur etiam KE parallela ipsi AC , ipsis CE , ce occurrens in E & e . Per propositionem præcedentem est KE æqualis ipsi FK ; unde cum sit etiam FA æqualis ipsi AC , æqualis ipsis Cc , Ee (per con-

(163)

constructionem) est ergo Ke æqualis KA ; unde est punctum K ad parabolam foco A & vertice principali C descriptam. *Q. E. D.*

Bisecto autem angulo $AK E$ à rectâ KB , tanget hæc utramq; parabolam, tam foco F per A & K , quam foco A per K descriptam. Unde se mutuo tangunt parabolæ. *Q. E. D.*

Errat. *Pag. 152. l. ult. pro $\beta c. l. B b.$*

F I N I S.

L O N D O N:

Printed for *W. and J. Innes*. Printers to the *Rev. Society*; at the Sign of the *Prince's Arms*,
End of *St. Paul's-Church-Yard*.

